Trajectoire d'une boule sur un billard polygonal

Paul BAGOURD

July 6, 2020

Résumé

Le présent document est un mémoire de bachelor de l'EPFL réalisé de février 2020 à juin 2020 au sein de la chaire de Géométrie Aléatoire, dirigée par Juhan Aru. Je le remercie de m'avoir permis de faire mon projet dans cette chaire. Je remercie particulièrement Alejandro Rivera qui m'a supervisé tout le long du semestre et aidé pour la rédaction.
On étudie ici le comportement d'une boule de billard en mouvement sur un polygone et qui rebondit sur les bords du polygone selon la loi de réflexion de Snell-Descartes.
Nous nous intéressons à des billards dont la surface est un polygone. La première partie présente l'historique et les méthodes pour construire des trajectoires périodiques dans un triangle. La deuxième partie s'intéresse aux trajectoires périodiques dans les polygones rationnels. La troisième partie étudie le comportement des trajectoires non-périodiques sur un polygone rationnel.

Sommaire:

1 Introduction **3**
1.1 Contexte historique 3
1.2 Approche intuitive 4

2 Trajectoires périodiques dans un triangle **5**
2.1 L'espace de recherche 6
2.2 La méthode de Fagnano, 1775 6
2.3 La technique du supertriangle, 1991 7
2.4 Le mystère des deltaplanes, 1992 8
2.5 La méthode des générateurs, 1999 9
2.6 Conclusion sur la méthode des générateurs 13
2.7 Un autre point de vue sur la méthode des générateurs 14

3 Trajectoires périodiques dans un polygone rationnel **16**
3.1 La dynamique discrète 16
3.2 Directions possibles pour une trajectoire 17
3.3 Préservation de la mesure par la transformation 22
3.4 Théorème de récurrence de Poincaré, 1899 23
3.5 Une sous-dynamique s'impose 23
3.6 Conclusion sur le théorème d'existence 25

4 Trajectoires non-périodiques dans un polygone rationnel **28**
4.1 La dynamique continue 28
4.2 La surface de translation 29
4.3 Dynamique sur la surface de translation 33
4.4 Démonstration du théorème 34
4.5 Vers le théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie, 1986 41

1 Introduction

1.1 Contexte historique

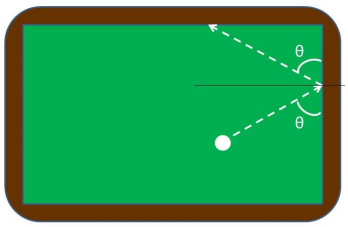
En mathématiques, le billard est un exemple de système dynamique, c'est à dire ce qu'on appelle un espace de phase représentant l'ensemble des états possibles d'un système, muni d'une loi d'évolution ou transformation donnant l'état du système dans un temps ultérieur.

La théorie des systèmes dynamiques a été initiée par Henri Poincaré qui s'intéressait au problème des "n corps", par exemple l'étude de la stabilité du système solaire. Il s'agissait alors de modéliser les astres par des masses ponctuelles soumises à la loi universelle de gravitation de Newton à travers des équations différentielles. Puis, la théorie s'est diversifiée en servant de cadre à beaucoup d'autres systèmes d'études comme par exemple l'étude des gaz.

Un billard mathématique est un système dynamique dans lequel une particule est en mouvement à vitesse constante sur une surface et effectue des rebonds sur des parois. L'angle de rebond est identique à l'angle d'incidence au moment de choc.
On peut par exemple étudier la particule à l'intérieur d'un cercle, mais aussi à l'extérieur de plusieurs cercles dans le plan, de diamètre un demi et de centre les entiers de Gauss. On appelle cela un billard dual. D'autre part, on peut remplacer le cercle par tout autre figure fermée, qu'elle soit concave, ou convexe, connexe ou non. Les figures très étudiés sont celles elliptiques et polygonales. De plus, on peut rajouter à l'intérieur de ces figures des segments contre lesquels la particule rebondit.

1.2 Approche intuitive

Dans ce rapport, on s'intéresse au jeu de billard classique. Considérons une boule de billard lancée sur un billard planaire à vitesse constante et supposons qu'elle ne subit pas de frottement. Elle rebondit sur les bords selon la loi de réflexion de Snell-Descartes. L'angle de réflexion a la même valeur que l'angle d'incidence mais leur sens sont opposés:



On repère ses positions au cours du temps qui forment alors sa trajectoire. On peut se poser beaucoup de questions sur le comportement de cette trajectoire, par exemple :

- Se refermera-t-elle sur elle-même ?
- Sinon, passera-t-elle par n'importe quel endroit du billard, plus souvent qu'à d'autres endroits ?

Définition 1.1 (Polygone)**.** *On entend par polygone une figure plane connexe et fermée par des segments de droite qu'on appelle les côtés.*

On suppose que le polygone ne soit pas dégénéré: 3 sommets ne peuvent pas être alignés. Nous nous intéressons à des billards dont la surface est un polygone.

Notation: $[k]$ désigne l'intervalle $\{1; 2; ...; k\}$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

2 Trajectoires périodiques dans un triangle

L'étude des trajectoires périodiques peut se réduire à un problème géométrique. Quand la trajectoire se referme sur elle-même, elle devient une figure géométrique bien établie au sein du polygone indépendamment du temps. Dans cette partie, nous étudions les trajectoires périodiques selon une approche géométrique. On suppose que la trajectoire ne touche aucun sommet du triangle.
Cette partie est informative et présente les grandes lignes du problème de Fagnano. On pourra dans la lecture sauter certains paragraphes dont l'objectif est de donner une justification intuitive mais pas nécessaire pour la compréhension.

Problème de Fagnano: Tout triangle possède-t'il une trajectoire périodique?

Pour le restant de la section, on se donne un triangle d'angles (α, β et γ) et de sommets respectifs A, B, C. On désigne un segment [IJ] par IJ. On pose par défaut la longueur de AB égale à 1: L(AB)=l.

Définition 2.1. *Un lien est un segment de trajectoire périodique dont les extrémités appartiennent aux bords du triangle. On dira qu'un lien est dans un angle θ si les deux extrémités sont sur les côtés formant θ.*

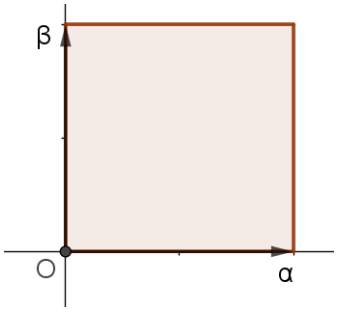
Définition 2.2. *Un triangle est obtus si un de ses angles est obtus. Sinon il est aigu. On dit qu'un triangle est périodique si il possède une trajectoire périodique.*

Définition 2.3. *Une trajectoire périodique est dite **stable** si pour toute petite perturbation du triangle au niveau des angles, le triangle obtenu contient une trajectoire périodique proche de celle d'avant. Deux trajectoires sont proches si elles ont le même nombre de rebonds et que ces rebonds restent sur les mêmes côtés. Intuitivement, elles ont la même forme.*

L'ensemble des trajectoires périodiques que nous verrons dans cette section sont stables, au sens de la définition 2.3.

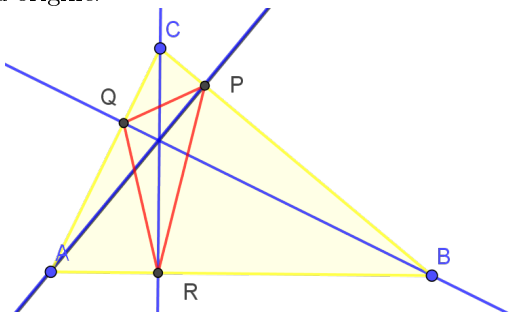
2.1 L'espace de recherche

A rotation près, on peut imposer que γ soit le plus grand angle du triangle. On détermine le triangle par le couple (α, β) qui correspond à un point dans un carré de côté de longueur $\frac{\pi}{2}$ muni d'un repère orthonormé d'origine le coin en bas à gauche. Les couples (α, β) et (β, α) désigne le même triangle donc la figure des solutions pour les triangles périodiques sera symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.



2.2 La méthode de Fagnano, 1775

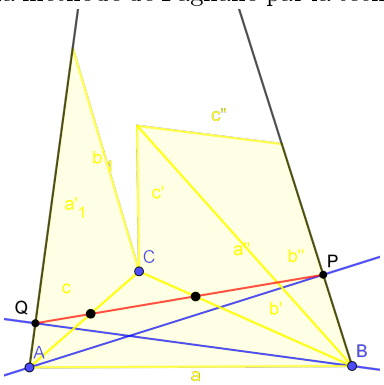
Cette méthode permet de construire une trajectoire pour tout triangle dont les angles sont strictement inférieurs à $\pi/2$: les triangles aigus. On trace les hauteurs du triangle et on note les points d'intersection avec les côtés opposés. Ces points forment le triangle orthique, qui constitue une trajectoire périodique pour le triangle d'origine.



La démonstration de ce fait repose essentiellement sur le théorème des angles inscrits.[1].

2.3 La technique du supertriangle, 1991

Pour des triangles obtus, il est parfois possible d'obtenir une trajectoire périodique en généralisant la méthode de Fagnano par la technique du supertriangle.



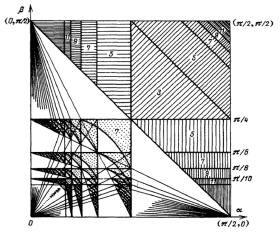
A partir d'un triangle obtus de départ ABC, on effectue les réflexions du triangle par rapport aux côtés AC et BC et on repère les bords d'extrémités A ou B des nouveaux triangles dits dépliés. On peut éventuellement effectuer des nouvelles réflexions des triangles dépliés par rapport à leur bord d'extrémité A ou B et noter les nouveaux bords d'extrémité A ou B des nouveaux triangles dépliés.
On note alors k le nombre de triangles autour de A et n le nombre de triangles autour du point B. Si lorsque l'on prolonge ces bords en des demi-droites d'origine A et B, il y a un point d'intersection I (qui n'apparait pas sur la figure), alors celui-ci forme un nouveau triangle BIC qui est surnommé le supertriangle. On peut vérifier que BIC est aigu. On construit alors le lien de haut du triangle orthique a partir triangle aigu BIC en traçant deux de ses hauteurs et leur bases respectives Q et P. On sait que le segment QP est un lien de trajectoire périodique pour le triangle BIC.

Cependant, on peut aussi montrer que, sous la condition que QP intersecte le triangle ABC, alors cette intersection est aussi un lien de trajectoire périodique pour ABC [7]. La démonstration repose sur le principe des dépliages et l'utilisation des hauteurs du triangle.
Cette condition (C) est la suivante:

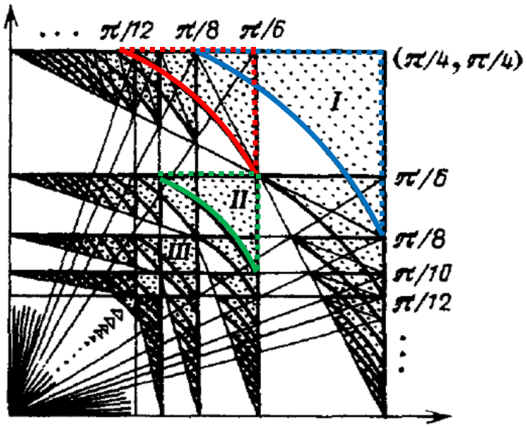
$$\exists k, n \in \mathbb{N}^* : (1 - cot(k\alpha)tan(\alpha)(1 - cot(n\beta)tan(\beta)) > 1 - tan(\alpha)tan(\beta)$$

Concrètement, la somme $2(k + n) - 1$ sera le nombre de liens de la trajectoire périodique. Plus précisément, on aura $2k - 1$ liens dans α, $2n - 1$ liens dans β et 1 seul dans γ.
On appelle les triangles possédant ce type de trajectoire des F-triangles en l'honneur de Fagnano dont la découverte du triangle orthique a permi d'en arriver à cette construction.

2.4 Le mystère des deltaplanes, 1992



La partie supérieure droite correspond aux solutions pour les triangles aigus



Images tirées de [7]

Si l'on trace la courbe sur l'espace de recherche, on obtient cette figure tirée de [7] sur laquelle j'ai repassé certaines courbes. On observe alors le phénomène que j'avais essayé de caractériser dans un travail antérieur: la présence de courbes. On note $S(k,n)$ l'ensemble des couples (α,β) pour lesquels l'angle vérifie la condition (C) définie plus haut, avec le choix des paramètres k et n. Chaque courbe participe à la frontière d'une aire de solution $S(k,n)$ correspondant au nombre de liens de la trajectoire périodique dans le triangle. Cette aire prend alors la forme d'un deltaplane.
Par exemple, la courbe bleue est la frontière de $S(2,2)$: 3 liens dans α et β. La courbe verte est la frontière de $S(3,3)$ et la courbe rouge de $S(3,2)$.
Les demi-droites partant de l'origine positionnent les extrémités des ailes des deltaplanes. J'avais obtenu un résultat similaire avec une autre méthode [1].

Discussion sur la possibilité de caractériser l'aire des deltaplanes
La condition (C) est pesante et il est difficile de comprendre l'étendue ou les types de triangles qui la satisfont, notamment la forme et l'aire correspondant dans la zone de recherche. J'avais longuement cherché une explication géométrique qui permettrait de retrouver explicitement des conditions pour ensuite calculer l'aire, sans y parvenir.

Dans [7], les auteurs ont dû faire face au même obstacle. Peut être qu'il faut simplement prendre la condition telle quelle. Peut être qu'il n'y a pas de moyen pour calculer cette aire. La courbe est bien définie par la condition, il suffirait de calculer cette aire par intégration assistée d'un ordinateur. On obtiendrait une valeur approchée entre 0 et $\frac{\pi^2}{4}$. Mais on ne saurait pas si ce nombre est exprimable selon certaines autres quantités bien connues.
Il n'est pas très étonnant de se trouver face à ce genre de condition quand on accepte que les triangles et la notion trajectoire périodique au travers des réflexions selon la loi de réflexion de Snell-Descartes n'ont a priori aucun rapport.
Peut être qu'il ne faut pas trop s'attendre à l'émergence de conditions aussi explicites que celle de la méthode de Fagnano, qui donnent alors à l'aire des solutions de Fagnano une valeur simple et explicite: $\frac{\pi^2}{8}$, la moitié de celle carré. Pourtant ce pourrait être le cas.
Il est très possible que la valeur de l'aire soit une quantité propre au problème des trajectoires périodiques dans les triangles, de la même manière qu'il n'y a pas d'autres moyens de signifier le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre que de dire que c'est justement cette même quantité qu'on appelle π et que les grecs avaient essayé d'exprimer rationnellement sans succès.

2.5 La méthode des générateurs, 1999

Définition 2.4 (Trajectoire impaire)**.** *Une trajectoire est dite impaire si son nombre de liens est impair.*

Théorème 2.5 (Trajectoire stable)**.** *Une trajectoire est impaire si et seulement si elle est stable*

On rappelle que si la trajectoire est stable, alors par définition elle est périodique. Si la trajectoire est impaire, elle est évidemment périodique car son nombre de liens doit être fini. J'ai pu me pencher sur la démonstration du sens direct qui est expliquée en [3].

On déduit alors que les trajectoires $(2(k+n)+1)$-périodiques dont nous avons parlé jusqu'à présents sont stables.
C'est en se basant sur ce résultat que Halbeisen et Hungerbuhler ont construit leur méthode des générateurs, générateurs de trajectoires stables.

Pour ce faire, on associe aux côtés AB, AC et BC les chiffres "1","2" et "3".
Si on note $\Omega_n = \{1,2,3\}^{\{1,\dots,n\}}$ et $\omega_n = \Omega_n/_{D_n}$, alors on peut associer à chaque trajectoire périodique l'unique élément dans ω_n que l'on appelera "code" et qui correspond aux numéros des côtés successifs sur lesquels rebondit la trajectoire.
Le groupe D_n est le groupe diédral correspondant aux n réflexions de la trajectoire sur les côtés du triangle, comme on le verra dans le prochaine section. Mais on peut déjà comprendre qu'il permette d'enlever en tout cas les répéti-

tions d'un même chiffre dans Ω_n: 1 puis 1 seraient deux réflexions selon le côté 1, donc l'identité dans Ω_n, donc n'apparaitrait pas dans ω_n.

Définition 2.6. *Un ensemble infini de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} w_n$ est appelé un générateur si tout mot de cet ensemble est le code d'une trajectoire périodique stable dans un triangle obtus.*

Un générateur n'est donc pas vraiment informatif de la quantité de triangles pour lequels il apporte une solution.
Le premier générateur découvert a été l'ensemble:

$$\{132(12)^{k-1}(13)^{n-1} : k, n \in \mathbb{N}, k+n > 2\}$$

En fait, ce générateur correspond aux trajectoires données par l'extension de la méthode de Fagnano: la technique du supertriangle. La démonstration de ce fait et de la propriété de générateur est direct quand on suppose valide la technique du supertriangle.

Propriété importante: si l'on considère l'image par la réflexion de la trajectoire après un rebond, on obtient un prolongement de la droite parcourue par la trajectoire avant le rebond.

Ce paragraphe est une simple traduction de ce qui est expliqué en [3].
L'idée de la méthode des générateurs est de construire de nouveaux générateurs à partir d'une situation dégénérée et de montrer qu'une perturbation adéquate des angles α et β mènent à une trajectoire stable.
Le principe est le suivant:
On lance une boule de billard en la faisant longer de A vers B le bord AB de manière infiniment proche. Au lieu de faire réfléchir la boule sur le côté BC, on effectue la réflexion ou dépliage du triangle selon BC et on prolonge en ligne droite la trajectoire de la boule. Cette ligne droite intersecte un autre côté du triangle déplié. On effectue la réflexion du triangle déplié par rapport à ce côté, on prolonge la trajectoire en ligne droite, et ainsi de suite. On effectue ainsi des dépliages du triangle de départ de manière à rendre droite la trajectoire et on note les côtés sur lequel elle aurait rebondi. Le cas limite où l'on fait confondre le début de trajectoire à AB est la situation dégénérée dont on parlait. On suppose pour le moment que la boule ne touche aucun sommet du triangle à part le point B. Cela conduit à la situation figure 1.

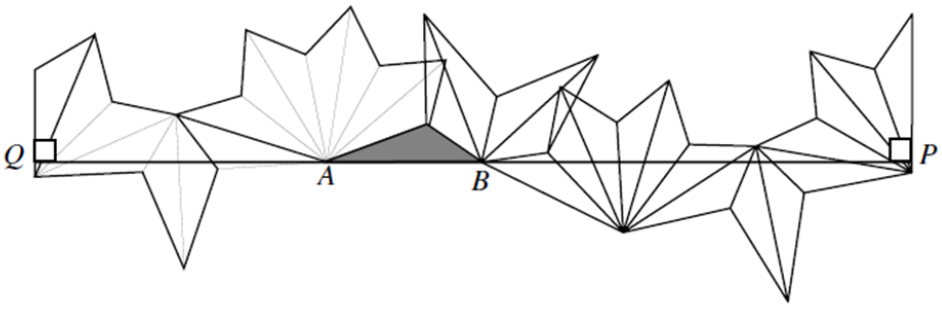


figure 1: situation dégénérée, tirée de [3]

On suppose aussi pour le moment qu'au bout d'un certain nombre de réflexions, la réflexion suivante se fera perpendiculaire au chemin suite à un côté vertical. On justifiera cette supposition par la suite. A ce point P on fait réfléchir la boule (et non plus le triangle) telle qu'elle revienne sur AB dans la direction opposée. En effet, pour une réflexion perpendiculaire, le dépliage dans un sens ou dans l'autre est le même. Donc on peut repartir dans l'autre sens pour ne pas à avoir répéter le même motif.
En appliquant alors le raisonnement identique à gauche, on déduit finalement que la trajectoire dans cette situation dégénérée sera périodique.
La séquence de réflexion à droite est: 3,1,3,1,3,2,1,2,1,2,1,3,,1,3,1,2,1,2
La séquence de réflexion à gauche est: 2,1,2,1,2,1,2,1,3,1,3,1,2,1,2

On peut appliquer ce même principe en longeant BC. Cependant il est inutile de le faire pour AC par symétrie des triangles en inter-changeant les α et β.
Comme on effectue un aller-retour pour chaque partie droite ou gauche, le nombre total de côtés touchés est paire. Si la trajectoire touchait aussi le côté AB, ce qu'elle fait bien dans le cas dégénéré, alors la trajectoire serait impaire. La méthode des générateurs avance alors que pour une légère modification des angles α et β, il existe par stabilité une trajectoire périodique proche de celle dans le cas dégénéré, dont le mot appartient alors à un générateur.
De cette affirmation un peu hâtive, il me semble qu'il faudrait a priori justifier trois points:

- on aboutit dans les deux sens à un côté vertical
- on ne touche aucun autre sommet que A et B en passant au cas limite
- la propriété de stabilité fonctionne pour une situation dégénérée

Justification intuitive
A titre d'exemple, Halbeissen et Hungerbuhler présentent une partielle justification de ces points en montrant en particulier que le générateur associé à la

situation évoquée dans l'exemple ci-dessus est bien un générateur de trajectoires stables:
Les deux premiers points découlent du choix du triangle associé à la situation dégénérée:
Pour le premier point, on part justement d'un triangle tel que son dépliage donne lieu dans les deux sens A vers B et B vers A, à un côté vertical.
Pour le deuxième point, on vérifie qu'il existe un espace de perturbation possible des angles α et β tel que toutes les trajectoires issues de la situation dégénérée dont celle dégénérée ne touchent pas de sommets des triangles modifiés associés aux trajectoires modifiées
Pour le troisième point, ils ne s'y attardent pas puisqu'ils admettent que le triangle orthique obtenu à partir des côtés verticaux légèrement inclinés engendre une trajectoire périodique à la manière de la technique du supertriangle.

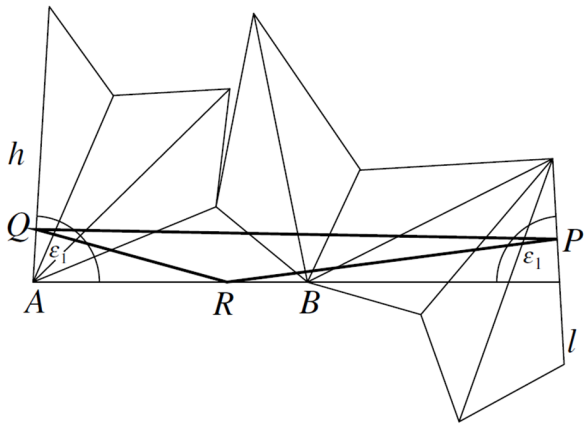


figure 2: situation non dégénérée, tiré de [3]

De leur point de vue c'est peut être trivial. Néanmoins, on peut le justifier en raisonnant par l'absurde en supposant que tout triangle PQR du type de la figure 2 ne conduise pas à une trajectoire périodique. Alors en se ramenant à la situation dégénérée avec les côtés verticaux, on obtiendrait une discontinuité de la configuration non-périodique de PQR à la configuration bien périodique de PQ de la figure 2, en observant que l'on fait finalement rebondir périodiquement une boule entre les points P et Q des côtés verticaux.
Cette discontinuité de configuration de PQR passant de non-périodique à périodique produirait une discontinuité de configuration dans l'ensemble des triangles dépliés, puisqu'il n'y a aucun autre facteur pouvant expliquer cela. C'est bien seuls les triangles dépliés qui déterminent PQR. Or cet ensemble de triangles dépliés est justement perturbé de manière continue ce qui est contradictoire.

2.6 Conclusion sur la méthode des générateurs

Un générateur en soi ne détermine pas l'étendue des triangles dans lesquels il existe une trajectoire périodique de ce code, il dit simplement qu'il en existe une pour un certain triangle. Néanmoins dans la construction et en particulier pour l'hypothèse sur les côtés verticaux, on donne des conditions nécessaires et suffisantes sur l'étendue des angles α et β.
Ainsi avec cette technique, Halbeissen et Hungerbuhler présentent l'étendue des solutions pour quelques générateurs qu'ils ont trouvé et affirment qu'ils ont pu montrer que 50% des triangles possèdent une trajectoire périodique.

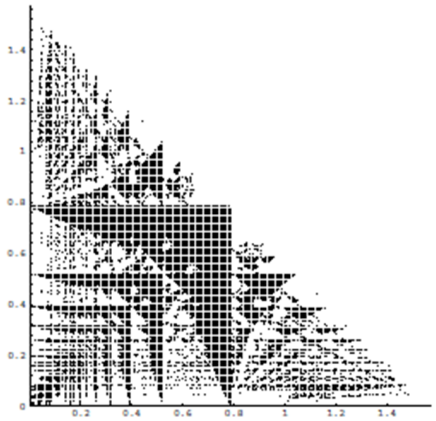


Image tirée de [3]
On retrouve les formes issues des deltaplanes provenant du premier générateur, auquel ont été ajoutés les points des solutions apportées par les autres générateurs.

Ce qui m'avait interpelé dans la méthode des générateurs était une fois de plus l'utilisation de l'angle droit pour trouver des trajectoires périodiques. De plus je trouve astucieux le fait de partir de situation dégénérée. Je me suis alors aperçu par les points P et Q que la méthode des générateurs est encore une extension de la méthode du supertriangle, donc une extension de la méthode de Fagnano. Dans leur démonstration, ils utilisent ce triangle explicitement. Je pense qu'ils avaient bien conscience de cette extension, même s'ils n'y font pas mention explicitement. Je pense aussi que c'est de cette idée qu'est née leur méthode des générateurs: générer des codes à partir des hauteurs du supertriangle dans l'espoir d'en avoir de suffisamment "bon" pour résoudre le problème de Fagnano.

Grâce au programme McBilliard de R. Shwartz, une démonstration assistée par ordinateur a établi que 99% des triangles contiennent une trajectoire périodique. Ce qui laisse fortement penser que la réponse au problème de Fagnano est oui. Mais la difficulté de le montrer provient sûrement du fait que pour certains triangles, des générateurs plus complexes sont nécessaires. Alors il faudrait

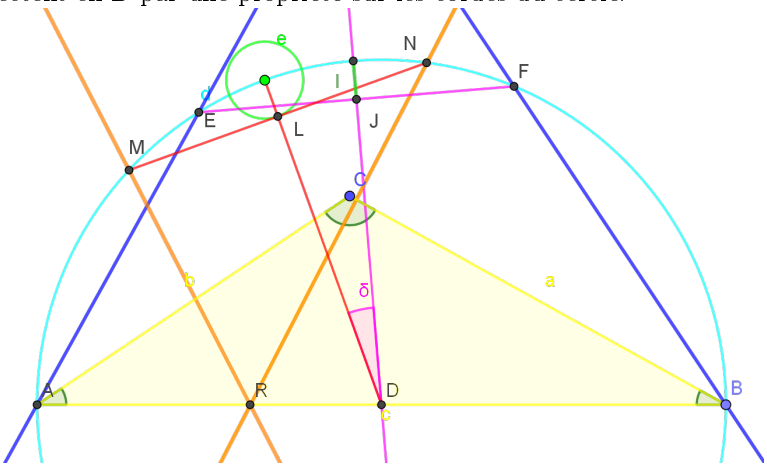
comprendre comment s'articulent les générateurs en fonction des triangles dans l'optique de mieux les manipuler et donc maitriser les générateurs plus complexes, si cela est possible.

2.7 Un autre point de vue sur la méthode des générateurs

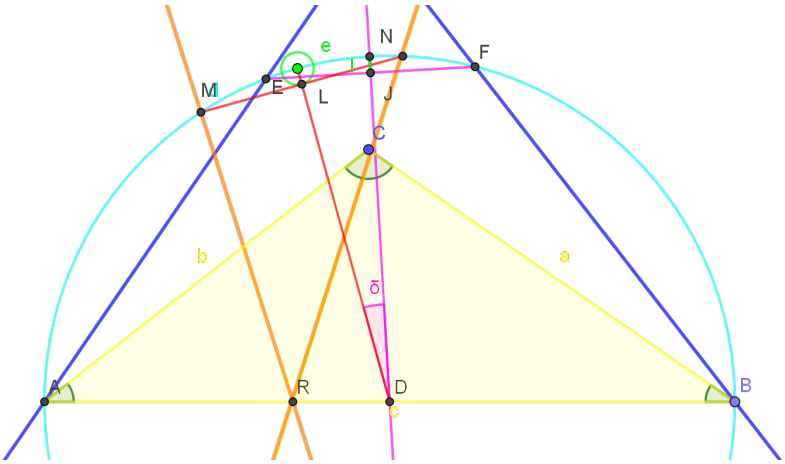
Quoiqu'il en soit les hauteurs des triangles sont intimement liées à leur trajectoires périodiques et plus qu'on ne pourrait le penser à première vue.
En travaillant de mon côté sur un certain générateur autre que

$$\{132(12)^{k-1}(13)^{n-1} : k, n \in \mathbb{N}, k+n > 2\}$$

, je me suis aperçu qu'il y avait un lien direct avec les hauteurs du triangle:
On se réfèrera au dessin en dessous. Par construction sur geogebra, le début de trajectoire en orange est une trajectoire périodique pour le triangle D jaune. Je n'ai pas représenté toute la trajectoire par soucis de visibilité mais seulement les deux droites oranges, essentielles pour ce que je veux expliquer.
En traçant les deux hauteurs bleues du triangle qui s'intersectent avec le cercle (de centre D le milieu de AB) en E et F, puis en notant l'intersection M et N des droites oranges avec le cercle, je me suis rendu compte que les segments EF et MN sont de même longueur. J'ai alors posé J le milieu de EF et L le milieu de MN, puis j'ai tracé les perpendiculaires à EF et MN passant par J et L. Elles s'intersectent en D par une propriété sur les cordes du cercle.



En changeant les angles du triangle ABC en déplaçant le point C, les hauteurs changent donc la longueur EF aussi. Mais finalement, en imposant L(MN)=L(EF) avec toujours M et N sur le cercle, puis en notant R le point de réflexion tel qu'une boule partant de M et se réfléchissant sur AB arriverait en N, alors il existe un angle δ en rose tel qu'en déplaçant le point vert sur le cercle pour arriver à cet angle, le début de trajectoire en orange ainsi formée soit à nouveau une trajectoire périodique pour un triangle modifié suffisamment proche de celui de départ, comme ci-dessous:



Après avoir lu la méthode des générateurs, j'ai compris que ce point de vue était finalement un reflet de cette première méthode: en déplaçant le point vert, on ne change pas le code de la trajectoire périodique.
J'ignore si ce point de vue est pertinent ou fructueux pour l'étude des générateurs. Il faudrait étudier les conditions sur l'angle δ telles que l'on ait toujours une trajectoire périodique pour ce code, et faire pareil avec d'autres codes, puis voir comment se comporte l'angle δ suivant les différents codes. Tout ceci est seulement une idée et je ne garantis pas qu'une certaine logique y émerge, rien a priori ne le justifie pour l'instant.
Néanmoins je tenais à la mentionner car c'est tout de même un autre point de vue sur la méthode des générateurs et qui a l'avantage de faire un lien direct et facile entre les hauteurs du triangle et une trajectoire périodique. Je ne sais pas encore si c'est propre au code de ma trajectoire mais je trouve assez remarquable qu'il faille seulement faire pivoter le segment issue des hauteurs EF sur le cercle du triangle pour parvenir à une trajectoire périodique pour le triangle. Je pense que ce n'est pas un hasard et que c'est le cas pour les autres codes de trajectoires périodiques. Chercher des informations sur les trajectoires périodiques en termes de points sur le cercle du triangle, en relation avec les points d'intersections des hauteurs du triangle sur le cercle pourrait être fructueux.

3 Trajectoires périodiques dans un polygone rationnel

Dans cette partie, nous étudions l'existence de trajectoires périodiques sur des polygones rationnels en utilisant cette fois le cadre des systèmes dynamiques.

Définition 3.1. *On dit qu'un angle α est π-rationnel s'il est multiple rationnel de π: $\alpha = \frac{m}{n}\pi$, $(m,n) = 1, n > 0$. Un polygone est alors appelé rationnel si tous ses angles sont π-rationnels.*

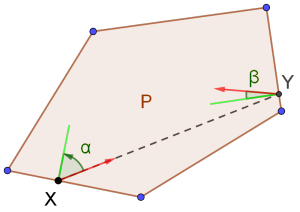
Nous prouverons le théorème suivant:

Théorème 3.2 (Théorème d'existence, Masur (1986) [4])**.** *Tout polygone rationnel possède une infinité de trajectoires périodiques. De plus, toute trajectoire qui commence perpendiculairement d'un côté et qui ne touche pas de sommet est périodique.*

On se donne un polygone P à n côtés, d'aire 1 dans le plan muni d'un repère orthonormé orienté dans le sens trigonométrique.
Notation: A partir d'un côté $c_1 = c_{n+1}$ de référence, on note c_i les côtés successifs dans le sens trigonométrique. L'angle α_i est la valeur absolue de l'angle intérieur entre les côtés c_i et c_{i+1}. Le sommet s_i est l'extrémité commune à c_i et c_{i+1}. Si P est rationnel, on note $\alpha_i = \frac{m_i}{n_i}\pi, (m_i, n_i) = 1$.

3.1 La dynamique discrète

Soit P un polygone rationnel, ∂P son bord. Le billard sur P peut être vu comme un système dynamique sur l'espace $\partial P \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



Définition 3.3 (Espace des phases $\mathcal{X}$ version discrète)**.** *Soit S l'ensemble des sommets de P. L'espace des phases de la dynamique discrète est l esous ensemble des couples (point du bord, angle) de $(\partial P \backslash S) \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ correspondant aux vecteurs unitaires basés sur le bord du polygone et qui pointent vers un point du bord du polygone différent d'un sommet. On note $\mathcal{X}$ cet espace.*

Remarque: on pourrait éventuellement prendre en compte les sommets et dire que la trajectoire s'arrête à l'instar du jeu de billard classique. Ceci permettrait de rendre la notation plus limpide mais il faut ensuite faire des modifications sur les définitions qui suivent et finalement cela rend inutilement le tout bien plus compliqué. Par abus de notation, on abrège ensuite $\mathcal{X}$ en $\partial P \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Définition 3.4. *Transformation du billard associée à la dynamique discrète: l'application $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ qui associe au couple $(X, \alpha) \in \mathcal{X}$ le couple $(Y, \beta) \in \mathcal{X}$ de telle sorte que si une boule part d'un bord selon (X, α), elle se réfléchira en une autre position (Y, β) où β est l'angle de réflexion selon les lois de Snell-Descartes. Un angle nul correspond à une réflexion perpendiculaire à un point du bord du polygone P, si ce point n'est pas un sommet.*

Remarque: la transformation est continue et injective. En effet à vitesse constante, pour une position, direction et un temps donné t, une seule position et direction envoie la boule vers cette première position et direction en un temps t.
Remarque: la transformation est bijective sur $\mathcal{X}$ privé des points (x, α) tels que la trajectoire dans le passé de (x, α) (c'est à dire partant du point $(x, -\alpha)$) finisse dans un sommet en un temps fini.
Remarque: on retrouve à travers T le vocabulaire de la théorie des groupes. Si on appelle $G = \{T^n, n \in \mathbb{Z}\}$ le groupe des itérations de T, on définit une action de G sur les points de $\mathcal{X}$ où T est bijective. L'orbite de $y \in \mathcal{X}$ est alors l'ensemble $O_y = \{T^n(y), n \in \mathbb{Z}\}$.
On dit que l'orbite O_y est périodique si la suite de points de O_y à partir de $n = 0$ est périodique. Cela revient aussi à dire que le stabilisateur St_y est différent de l'ensemble vide. Il est clair que cela correspond à une trajectoire périodique.

Remarque: ici la dynamique est discrète car on s'intéresse seulement à la position de la boule au moment des rebonds, donc sur un intervalle de temps discret. Dans la prochaine section, on utilisera une autre dynamique: la dynamique continue.
Étant donnée une orbite discrète, on obtient une orbite continue en remarquant qu'entre deux rebonds consécutifs aux temps t_0 et t_1, la trajectoire est rectiligne donc l'orbite continue de y sera $O_y = \{(y(t)), t), t \in [t_0; t_1]\}$ si $y(t)$ désigne le vecteur (position, sens)$\in (\mathring{P} \times \mathbb{S}^1)$ de la boule à l'instant $t_0 + t$. Réciproquement, l'orbite discrète s'obtient à partir de l'orbite continue en ne retenant que les informations sur les bords de P.

3.2 Directions possibles pour une trajectoire

Étant donnée une trajectoire déterminée par un point dans $\mathcal{X}$, ses changements de directions possibles par réflexion sur les côtés du polygone sont en nombre fini. En effet, au lieu de changer la direction de la trajectoire, on peut la prolonger en une ligne droite en faisant plutôt réfléchir le polygone par rapport au côté d'incidence. La trajectoire sera donc une ligne droite mais on observe clairement que chaque changement "d'orientation" du polygone signifie que la trajectoire a changé de direction. Si l'on retombe à une même "orientation" de polygone, cela signifie que la trajectoire revient selon la même direction. Plus de précisions seront apportées dans la suite de cette partie et surtout dans la prochaine partie où l'on parlera d'angle relatif du polygone.

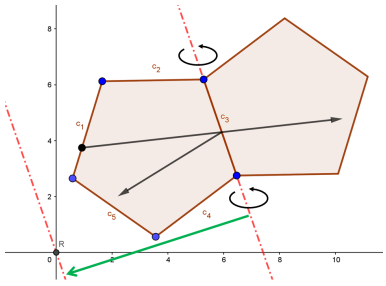
On montre ici que les "orientations" possibles du polygone correspondent aux produits possibles d'un certain groupe de réflexions issues des côtés du polygone et que ce groupe est fini.

Définition 3.5 (Groupe des déplacements du polygone $G(P)$)**.** *Le groupe des déplacements du polygone est l'ensemble engendré par les réflexions d'axes dirigés par les côtés du polygone P: ce sont des réflexions affines. Concrètement, ces transformations appliquées à P produisent en fait son dépliage.*

Les éléments de $G(P)$ sont conjugués à des réflexions linéaires par des translations. Notons $\sim_t$ la relation de translation.

Définition 3.6 (Groupe des réflexions du polygone $O(P)$)**.** *Le groupe des réflexions du polygone est l'ensemble des réflexions linéaires ainsi obtenues. Plus précisément $O(P)$ est obtenu à partir du quotient $G(P)/_{\sim_t}$ en prenant comme représentants des classes d'équivalences les réflexions linéaires.*

On peut observer qu'il s'agit d'un sous-groupe de $O(2,\mathbb{R})$, le groupe orthogonal du plan. On dit que $G(P)$ est projeté sur $O(2,\mathbb{R})$ en quotientant par les translations.



Soit (d_i) la droite passant par l'origine parallèle à c_i et R_i la réflexion par rapport à (d_i), pour chaque $i \in [n]$. Le sous-groupe $O(P)$ issu la projection de $G(P)$ sur $O(2,R)$ est donc l'ensemble des transformations engendrées par les réflexions $\{R_i,\, i \in [n]\}$ et alors $O(P) =< R_1; ...; R_n >$.

Définition 3.7 (Groupe diédral)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, un groupe diédral D_n est un groupe de la classe d'isomorphisme des groupes engendrés par un élément a d'ordre 2 et un élément b d'ordre n sous la relation $bab = a$. En terme de présentation, $D_n \cong < a, b | a^2, b^n, baba^{-1} >$. On peut vérifier que D_n contient $2n$ éléments.*

Notation: $R(\alpha)$ désigne la rotation d'angle α dans le sens trigonométrique.

Exemple 1. *Par exemple pour $n \in \mathbb{N}$, étant donnée une réflexion R, $< R, R(\frac{2\pi}{n}) > \cong D_n$. En effet, une réflexion est d'ordre 2, $R(\frac{2\pi}{n})$ d'ordre n et on peut vérifier que $R(\frac{2\pi}{n}) \cdot R \cdot R(\frac{2\pi}{n}) = R$. On vérifie également que $< R, R(\frac{2\pi}{n}) >$ contient $2n$ éléments: les réflexions par rapport aux droites d'écart angulaire $\frac{i\pi}{n}, i \in [2n-1]$ avec la droite correspondante à R. On construit alors un isomorphisme par l'homomorphisme injectif qui envoie R sur a et $R(\frac{2\pi}{n})$ sur b. Il y a bijection car*

les deux groupes ont le même nombre d'éléments.
Ici R détermine concrètement les éléments du groupe. En effet, dans le contexte des isométries du plan, étant donnée une réflexion R, il existe un unique groupe $< R, R(\frac{2\pi}{n}) >$. On dit que R fixe un représentant pour la classe d'équivalence des isomorphismes de D_n.

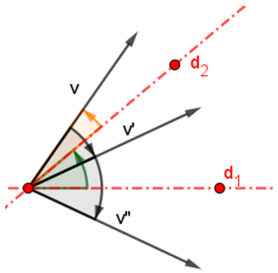
Propriété du sous-groupe diédral: soit $0 < n < m$. Soient G_n et G_m des groupes isomorphes aux groupes diédraux d'ordre n et m respectivement. Si $n|m$ et si G_n et G_m possèdent un élément d'ordre 2 en commun, alors $G_n \leq G_m$. On admet cela dans le cas général mais dans le cas de l'exemple, la démonstration est directe.

Théorème 3.8. *$O(P) \cong D_n$ pour un $n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow P$ est rationnel*

Démonstration. On montre d'abord le sens direct ($\Rightarrow$) par contraposée.
Soient deux réflexions R_1 et R_2. Comme elles sont d'ordre 2, R_iR_i=identité $i \in \{1;2\}$. Ainsi, les éléments du groupe engendré par R_1 et R_2 sont de l'une des quatre formes suivantes:

$$R_1R_2R_1...R_1R_2R_1 \quad R_1R_2R_1...R_2R_1R_2$$
$$R_2R_1R_2...R_1R_2R_1 \quad R_2R_1R_2...R_2R_1R_2$$

On raisonne toujours dans le sens trigonométrique. On commence par montrer que si θ est l'angle aigu formé par les droites d_1 et d_2, alors R_1R_2 est la rotation d'angle -2θ, $R(-2\theta)$. Pour le prouver, il suffit de considérer un vecteur v disons d'angle α par rapport à d_2, puis lui appliquer la transformation R_1R_2, c'est à dire R_2 puis R_1.



Alors v subit d'abord une rotation d'angle -2α et devient v', puis v' subit une rotation d'angle $-2(\theta - \alpha)$ et devient v'', ce qui fait un total de -2θ.
Donc $R_1...R_2$ correspond à $R(-2n\theta)$ pour un $n \in N$. De plus $(R_1R_2)^{-1} = R_2^{-1}R_1^{-1} = R_2R_1$ en tant qu'éléments d'un groupe et $(R_1R_2)^{-1} = R(2\theta)$ puisque ce doit être l'inverse de la rotation $R(-2\theta) = R_1R_2$.
On a alors que $< R_1; R_2 >= \{R(2n\theta); R_i \times R(2n\theta); n \in \mathbb{Z}; i = 1; 2\}$ et donc si θ est rationnel, $< R_1; R_2 >$ est un ensemble fini.
A l'inverse, si P n'est pas rationnel, il existe un angle α_i de P qui est multiple irrationnel de π et donc $< R_i; R_{i+1} >$ est infini.
Ceci fournit le sens direct ($\Rightarrow$) du théorème par contraposée puisque $< R_i; R_{i+1} > \subseteq <$

$R_1; ...; R_n >= O(P)$ et alors $O(P)$ est infini donc isomorphe à aucun groupe diédral.

On montre maintenant le sens indirect ($\Leftarrow$) du théorème. On suppose que P est rationnel: $\alpha_i = \frac{m_i}{n_i}\pi, (m_i, n_i) = 1$.
Soit $N = ppmc(n_i)$, nous allons montrer plus précisément que $O(P)$ est le groupe diédral D_N associé à une réflexion par un de ses côtés et la rotation d'angle $\frac{2\pi}{N}$.
Étudions les éléments possibles $M = \prod_{j=1}^{m} R_{i_j}$ avec $i_j \in [n]$.
Comprenons d'avantage $< R_1; R_2 >$ dans le cas où θ est π-rationnel. Par les observations précédentes, on peut simplifier certaines occurrences dans les quatre possibilités par:

$$R_1R_2 = R(2\theta);\ R_2R_1 = R(2\theta)^{-1};\ R_2R_2 = 1\,.$$

Alors $< R_1; R_2 >$ est exactement le groupe engendré par R_1 et $R(2\theta)$, c'est à dire $< R_1; R(2\theta) >$. Or, il existe k tel que $R(2\theta)^k = R(2\frac{\pi}{n})$ par le théorème de Bézout en se rappelant que $\theta = \frac{m}{n}; (m, n) = 1$.
Ainsi $< R_1; R_2 >=< R_1; R(2\frac{\pi}{n}) >$ et R_1 est d'ordre 2. Donc $< R_1; R_2 >$ est un représentant de la classe d'isomorphisme de D_n fixé par R_1 ou bien R_2.

Pour le cas général de plusieurs réflexions, on procède par double inclusion.
Tout d'abord, pour un $n \in \mathbb{N}$, définissons G_n comme le groupe engendré par R_1 et $R(\frac{2\pi}{n})$, qui est isomorphe à D_N.
Pour l'inclusion $< R_i; i \in [n] >\subseteq G_N$, soit $M \in< R_i; i \in [n] >$: $M = R_{i_2}...R_{i_m}$ pour un $m > 2$ et des indices dans $[n]$. On écrit $M = R_1R_1R_{i_2}...R_{i_m}$, avec R_1 qu'on note R_{i_0} ou R_{i_1}.
Les angles entre les droites associées d_{i_k} et $d_{i_{k+1}}$ issues des côtés indexés par les réflexions sont clairement rationnels car ce sont des sommes de $\theta_i, i \in [n]$. On les note $\beta_k = \frac{x_k}{y_k}, (x_k, y_k) = 1$. Par construction, pour tout k $\in \mathbb{N}$: y_k divise N.

On suppose par récurrence que $R_{i_j} \in G_N$ pour un $j > 0$.
Pour l'initialisation, il est clair que $R_1 \in G_N$ par hypothèse sur G_N.
Par l'hypothèse de récurrence $R_{i_j} \in G_N$. Or, comme on l'a vu pour le cas de 2 réflexions, $< R_{i_j}; R_{i_{j+1}} >=< R_{i_j}; R(2\frac{\pi}{y_j}) >= G_{y_j}$. De plus, avec R_{i_j} pour élément d'ordre 2 en commun: $G_{y_j} \leq G_N$ par la propriété du sous-groupe diédral car y_j divise N. Ainsi $R_{i_{j+1}} \in G_N$ pour le représentant R_1 et l'hérédité est démontrée. On conclut par récurrence.
Ainsi toutes les réflexions de M appartiennent au même groupe G_N donc $M \in G_N$. Nous avons montré l'inclusion $< R_i; i \in [n] >\subseteq G_N$.

Pour l'autre inclusion $G_N \subseteq< R_i; i \in [n] >$, comme R_1 et $R(\frac{2\pi}{N})$ engendrent G_N, il suffit de montrer que $R(\frac{2\pi}{N}) \in< R_i; i \in [n] >$.
On procède par récurrence sur le nombre k de réflexions R_i en correspondance avec les côtés $c_1; ...; c_k$ de P dès que $n \geq 3$. On note $N_k = ppmc(n_i, i \in [k])$.
Soit A_k la propriété: $R(\frac{2\pi}{N_k}) \in< R_i; i \in [k] >$.

- A_2 est vraie par les calculs précédents.
- On suppose A_{k-1} vraie et on montre A_k vraie:

On utilise l'arithmétique élémentaire. On écrit $N_k = ppmc(n_i, i \in [k]) = ppmc(ppmc(n_i, i \in [k-1]); n_k) = ppmc(N_{k-1}; n_k)$. On remarquera que $N_n = N$. Sachant que par hypothèse de récurrence $R(\frac{2\pi}{Nk-1}) \in < R_i; i \in [k-1] > \subseteq < R_i; i \in [k] >$, en utilisant cette rotation est la rotation engendrée par $d_n - 1$ et d_n, montrer A_k revient à montrer qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathcal{Z}$ tels que:

$$\frac{1}{N_{k-1}}k_1 + \frac{m_k}{n_k}k_2 = \frac{1}{N_k} mod(1)$$

D'abord $R(\frac{2\pi}{n_k}) \in < R(\frac{2m_k\pi}{n_k}) >$ puisque c'est équivalent à :

$$\exists a \in Z : R^a(\frac{2n_k\pi}{n_k}) = R(\frac{2\pi}{n_k}) \Leftrightarrow \exists a \in Z : m_k a = 1 mod(n_k)$$

Cette équivalence est vraie par le théorème de Bézout en se rappelant que $(m_k, n_k) = 1$. Il suffit alors de montrer qu'il existe k_1 et k_2 tels que:

$$\exists k_1, k_2 \in Z : \frac{k_1}{N_{k-1}} + \frac{k_2}{n_k} = \frac{1}{N_k} mod(1)$$

Ce qui est équivalent à:

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : \underbrace{\frac{ppmc(N_{k-1}, n_k)}{N_{k-1}}}_{a} k_1 + \underbrace{\frac{ppmc(N_{k-1}, n_k)}{n_k}}_{b} k_2 = 1 mod(ppmc(N_{k-1}, n_k))$$

Cette dernière proposition est vraie par le théorème de Bézout en remarquant que $(a, b) = 1$.
Ainsi $< R(\frac{2\pi}{Nk}, R_1 >= D_{N_k} \subseteq < R_1, ..., R_k >$. L'hérédité est vérifiée, on conclut sur A_k par récurrence. $A_n : R(\frac{2\pi}{N}) \in < R_i; i \in [n] >$ est démontrée.

□

Conclusion: $O(P) \cong D_N$ et $Card(D_N) = 2N$ donc le nombre de directions possibles pour une trajectoire est borné supérieurement par $2N$.

3.3 Préservation de la mesure par la transformation

Définition 3.9. *Soit un espace topologique X et une mesure μ. Une transformation $T : X \longrightarrow X$ préserve la mesure μ si: $\forall A \subseteq X : \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$*

Nous montrons ici que la mesure μ sur l'espace des phases pour la dynamique discrète $\mathcal{X}$ donnée par $d\mu(t,\theta) = \cos(\theta)dtd\theta$ préserve la transformation T du billard associée à la dynamique discrète. On a bien que μ est une mesure car c'est un produit d'une fonction continue avec la mesure de Lebesgue $dtd\theta$.
Soit $A \subseteq \mathcal{X}$, on peut décomposer A en sous-ensembles disjoints $A_{i,j}, i,j \in [n]$ où $A_{i,j}$ est l'ensemble des $(y,\beta) \in A$ tel $y \in c_j$ et $(y,\beta) = T(x,\alpha)$ pour $(x,\alpha) \in A$ et $x \in c_i$. Cette décomposition est possible car la transformation est continue et injective.
Soient donc c_i et c_j deux côtés du bord du polygone formant un angle α.
Par définition de la mesure μ et en notant $D =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $c_i = [0,c_i]$ par soucis de clarté:

$$\mu(A_{i,j}) = \int_{A_{i,j}} d\mu(s,\phi) = \int_D \int_{c_j} \mathbb{1}_{A_{i,j}}(s,\phi)\cos(\phi)dsd\phi$$

et

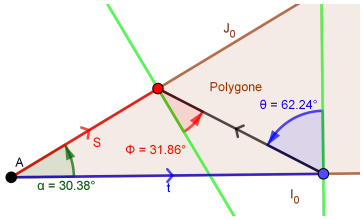
$$\mu(T^{-1}(A_{i,j})) = \int_{T^{-1}(A_{i,j})} d\mu(t,\theta) = \int_D \int_{c_i} \mathbb{1}_{T^{-1}(A_{i,j})}(t,\theta)\cos(\theta)dtd\theta$$

On peut paramétrer la transformation du billard par:

$$T : (t,\theta) \mapsto (S(t,\theta), \Phi(t,\theta))$$

où

$$S(t,\theta) = t\frac{\cos(\theta)}{\cos(\Phi(t,\theta))};\ \Phi(t,\theta) = \alpha - \theta\,.$$



Donc le déterminant de dT est $\det(dT(t,\theta)) = -\frac{\cos(\theta)}{\cos(\Phi(t,\theta))}$.On a par la formule de changement de variables usuelle:

$$\int_D \int_{c_j} \mathbb{1}_{A_{i,j}}(s,\phi)\cos(\phi)dsd\phi = \int_D \int_{c_j} \mathbb{1}_{A_{i,j}}(S(t,\theta),\Phi(t,\theta))\cdot\cos(\Phi(t,\theta))|-\frac{\cos(\theta)}{\cos(\Phi(t,\theta))}|dtd\theta$$

$$= \int_D \int_{c_i} \mathbb{1}_{T^{-1}(A_{i,j})}(t,\theta)\cos(\theta)dtd\theta$$

Donc on a bien $\mu(A_{i,j}) = \mu(T^{-1}(A_{i,j}))$. Par additivité de μ pour les $A_{i,j}$ disjoints on obtient $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, T préserve la mesure μ.

3.4 Théorème de récurrence de Poincaré, 1899

Théorème 3.10. *Soit X un espace topologique mesuré de volume fini. Soit T une transformation sur X préservant le volume pour la mesure de X. Pour tout ouvert non vide, il existe un point $x \in U$ qui retourne à ce voisinage U par la transformation: $\exists n > 0 : T^n x \in U$. De plus, l'ensemble des points qui ne retournent pas dans U est de volume nul.*

Démonstration. Nous démontrons seulement la première partie du théorème, principalement inspirée de [6].
On considère les pré-images successives de T pour U: $\{\{T^{-n}U = \{x : T^n(x) \in U\}, n \in \mathbb{N}\}$. Elles ont le même volume par l'hypothèse sur T. Comme le volume de l'espace X est fini, des images s'intersectent. Donc il existe $k > l \geq 0$ on a $T^{-k}U \cap T^{-l}U \neq \emptyset$ et alors $T^{-(k-l)}U \cap U \neq \emptyset$ ou autrement dit $T^{k-l}(x) \in U$ pour un $x \in U$: x est le point recherché avec $n = k - l$ □

Remarque: un raisonnement un peu rapide serait d'appliquer ce théorème à la dynamique pour $\mathcal{X}$ et dire qu'un point de $\mathcal{X}$ de direction perpendiculaire revient toujours à un voisinage aussi petit que l'on veut. Comme le nombre de directions est fini, ce point reviendrait aussi avec une direction perpendiculaire et donc la trajectoire serait périodique. C'est ce raisonnement qui est effectué dans [6], mais j'ignore si l'on peut choisir ainsi le point qui retourne au voisinage de tel sorte que sa direction soit perpendiculaire. Le théorème de récurrence de Poincarré ne mentionne pas cela a priori.

3.5 Une sous-dynamique s'impose

Pour contourner le problème de la dernière remarque, on considère l'ensemble des points: $B = \{(x, 0), x \in L\} \subset \mathcal{X}$ pour L un segment arbitraire de longueur quelconque $\epsilon > 0$ inclus dans le côtés c_1. B correspond alors à l'ensemble des trajectoires perpendiculaires à L. On sait que le nombre de directions possibles pour ce faisceau de trajectoires est $2N$. On note θ_k ces directions après avoir posé $\theta_1 = 0$. $B \subset \mathcal{X}$. On introduit alors une sous-dynamique sur le sous-espace des phases:

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{k=1}^{2N} \bigcup_{i=1}^{n} (c_i \times \theta_k) \subset \mathcal{X}$$

La transformation T définie pour la dynamique discrète est bien toujours une transformation pour cette sous dynamique. On munit $\mathcal{Y}$ de la mesure:

$$d\nu(t, \theta_k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{c_i}(t) \cdot f(i, k) dt$$

où $f(i, k)$ est un coefficient servant à ramener l'épaisseur du faisceau se réfléchissant sur c_i suivant la direction θ_k à la valeur ϵ. Par exemple si α_2 est strictement aigu, alors $f(2, 0) = \frac{\epsilon}{\cos(\alpha_2)}$ pour des raisons géométriques.
On trouve explicitement par la loi des sinus: $f(i, k) = \frac{\cos(\theta_k)}{\cos(\theta_k + \sum_{j=2}^{i} \alpha_j)} \epsilon$. Par

construction de $f(i,k)$: $\nu(B) = \nu(T(B))$.

Lorsque le faisceau rencontre un sommet, il se divise en deux, mais ce n'est pas problématique. En effet, à chaque fois que l'on touche un sommet, l'épaisseur du faisceau ne change pas car un point dans B qui toucherait un sommet est de mesure nulle pour la mesure ν. Soit $E \subset B$ l'ensemble des points de B qui toucheront un sommet par itérations de T. On peut se demander si $\nu(E) > 0$. Ce n'est pas le cas puisqu'on peut toucher à chaque réflexion un nombre fini de sommets. Le faisceau se diviserait peut être en un nombre exponentiel de sous-faisceaux mais comme on progresse en un temps discret, E est un ensemble dénombrable de points et donc $\nu(E) = 0$. La somme de l'épaisseur des sous-faisceaux reste égale à ϵ.
De plus, comme les trajectoires issues de B sont perpendiculaires, T est bijectif sur B sauf en les points de B dont l'image par T est un sommet. Soit F cet ensemble de points et soit T^{-1} la transformation inverse de T sur l'ensemble où T est bijective. Par $\nu(B) = \nu(T(B))$ et par bijectivité: $\nu(B \backslash F) = \nu(T^{-1}(B \backslash F))$. Or $F \subset E$ est de volume nul par le raisonnement précédent donc $\nu(B \backslash F) = \nu(B)$ et $\nu(T^{-1}(B) \backslash F) = \nu(T^{-1}B)$ où $T^{-1}B$ est ici la pré-image de B par T. Finalement $\nu(B) = \nu(T^{-1}B)$. T préserve la mesure ν.

Le volume de l'espace des phases $\mathcal{Y}$ par rapport à la mesure ν est fini. En effet:

$$\nu(\mathcal{Y}) = \int_{\mathcal{Y}} d\nu = \sum_{k=1}^{2N} \sum_{i=1}^{n} \int_{c_i} \mathbb{1}_{c_i}(t) \cdot f(i,k) dt = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{2N} f(i,k) dt < +\infty$$

Ou plus simplement $\nu(\mathcal{Y}) = 2N \sum_{i=1}^{n} c_i$ quand on se rappelle que l'on intègre $d\nu$ suivant toutes les directions θ_k sur tout les côtés, mais que les $f(i,k)$ ramènent finalement l'intégrale à la longueur des c_i.

3.6 Conclusion sur le théorème d'existence

Nous sommes en position de démontrer le théorème 3.2.

Démonstration. On considère un point $y \in B \subset \mathcal{Y}$. Comme le volume de $\mathcal{Y}$ par rapport à la mesure ν est fini et que T préserve la mesure ν, on peut appliquer le théorème de récurrence de Poincaré pour l'ouvert $U = B$. Il existe un point $x \in B$ qui retournera par T à l'ouvert B et donc de manière perpendiculaire à c_1. La trajectoire rebroussera alors encore chemin et l'on aura une trajectoire périodique.
On a donc montré que les trajectoires perpendiculaires périodiques sont denses parmi toutes les trajectoires perpendiculaires. □

Remarque: Masur a démontré par la même occasion que pour un départ quelconque d'une trajectoire sur le bord, les directions pour laquelle elle est périodique est dense dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ceci implique finalement que les points périodiques dans l'espace des phases sont denses. Mais sa démonstration utilise des outils plus complexes que ceux utilisés dans ici. [4]

Remarque: néanmoins les trajectoires périodiques sont infiniment rares comme nous pourrons le voir dans la prochaine partie.

Remarque: on passe beaucoup de temps à démontrer le théorème 3.8. En fait, certains passages ne sont pas indispensables pour la démonstration, même si je les ai gardé pour diverses raisons:

- Nous avons juste besoin de montrer que $O(P)$ est fini. Montrer que $O(P) \cong D_N$ est plus long mais je pense qu'il est intéressant de le savoir et de le montrer.
- Introduire la dynamique sur $\mathcal{X}$ et montrer que la mesure μ est préservée par T n'est pas utile. Je l'ai gardé car c'est tout de même un exemple de mesure préservée par T.
- Démontrer le théorème de récurrence de Poincaré n'est pas nécessaire. On peut l'utiliser implicitement. Je l'ai fait explicitement pour souligner comment le théorème d'existence renvoie à ce concept important et utilisé aussi dans d'autres champs que celui de la dynamique.

La démonstration peut être très courte. Pour le nombre fini $D \leq 2N$ de directions, il suffit de faire la première inclusion de la démonstration du sens indirect du théorème 3.8.
Ensuite, de manière intuitive et très claire, on considère B comme un segment ouvert de longueur ϵ inclus dans c_0 sur lequel part perpendiculairement un faisceau de trajectoires. A chaque réflexion, l'épaisseur totale du faisceau est toujours bornée inférieurement par ϵ. On peut rencontrer des sommets: le faisceau se divise alors en sous-faisceaux mais cela ne fait pas diminuer l'épaisseur totale de tout les sous-faisceaux. On fera attention à distinguer l'épaisseur d'un

sous-faisceau avec celle de la portion du bord sur laquelle il se réfléchit: cette portion est toujours supérieure à l'épaisseur du sous-faisceau. De plus, les différents sous-faisceaux se réfléchiront à différents instants mais toujours en temps fini donc pour on peut effectuer un nombre aussi grand que l'on veut d'itérations pour un temps assez long.
Ensuite on considère D copies du bord ∂P du polygone auxquelles ont associe une unique direction parmi les directions possibles. A itérations, l'ensemble des sous-faisceaux se réfléchissent sur certains côtés selon une direction possible θ_i, on colorie sur la copie de direction associée θ_i la trace du sous-faisceau sur le bord ∂P. A chaque itérations, on doit donc colorier d'une longueur d'au moins $\epsilon > 0$ une partie des bords de l'ensemble des D copies. Comme les bords sont de longueur finie, on devra au bout d'un moment colorier une partie déjà coloriée. Plus exactement, ceci arrivera avant au moins $\left\lfloor \frac{D \cdot \mathcal{L}(\partial P)}{\epsilon} \right\rfloor + 1$ itérations ou sessions de coloriage. Ceci signifie qu'il existe dans $B = \{(x, 0), x \in L\} \subset \mathcal{X}$ deux points y et z et $j = i + p > i \geq 0$ tels que :

$$T^j(y) = T^i(z) \Leftrightarrow T^i(T^p(y)) = T^i(z) \Leftrightarrow T^p(y) = z$$

où la dernière équivalence suit de l'injectivité de T. Ainsi y est envoyé sur z par T. Comme ce sont des points "perpendiculaires", la trajectoire partant de y est périodique. C'est bien ce raisonnement qui m'a conduit à la sous-dynamique introduite plus haut.
On a donc une borne supérieure sur le nombre de rebonds p de la trajectoire périodique obtenue à partir du segment ouvert B de longueur ϵ puisque:

$$p \leq j \leq \left\lfloor \frac{D \cdot \mathcal{L}(\partial P)}{\epsilon} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{2N \cdot \mathcal{L}(\partial P)}{\epsilon} \right\rfloor + 1$$

Ensuite, ϵ est borné par la longueur du côté c_i sur lequel on prend B. On sait donc qu'il existe une trajectoire périodique de taille inférieure à :

$$\left\lfloor \frac{2N \cdot \mathcal{L}(\partial P)}{\max_{1 \leq j \leq n} c_i} \right\rfloor + 1$$

Remarque personnelle: ces trajectoires sont dites perpendiculaires car elles possèdent un angle droit, donc deux. On cherche des trajectoires périodiques dont l'essence est le principe de rebondir selon un même angle à un même point, donc une invariance dans l'espace de phase ou bien l'espace du polygone lui-même. En s'intéressant à ces trajectoires perpendiculaires, on espère faciliter la recherche de trajectoires périodiques en se servant directement de la propriété d'invariance par réflexion. Effectivement, le seul rebond qui rend invariant l'angle d'incidence et de réflexion sur le bord du polygone est le rebond perpendiculaire.
Je pense que c'est cet angle droit qui permet de les exhiber plus facilement que les autres trajectoires périodiques non-perpendiculaires. En effet, elles sont dégénérées. D'une certaine manière, elles sont appauvries en détail puisqu'on ne voit pas de cycle dans leur forme au sein du polygone, comme une ellipse qui se serait refermée sur elle-même et l'on ne verrait plus qu'un segment. J'aime penser que c'est par cet appauvrissement qu'on peut gagner en facilité d'étude et d'extraction mais qu'on perd fatalement en gamme de solutions. On aboutit alors à certaines solutions de triangles qui les contiennent, mais les angles de ces triangles sont discrets sur l'ensemble des angles possibles. Jusqu'à maintenant, avec ce que j'ai pu voir dans différents articles, je crois qu'il n'existe pas encore de démonstration pour trouver des trajectoires périodiques via les trajectoires perpendiculaires pour un certain continuum de polygones (ensemble de polygones dont les angles varient dans un intervalle continu non réduit à un point), par exemple les triangles aigües, et cela ne m'étonnerais pas qu'il n'y en ait pas. Pour toutes ces raisons, je trouve les trajectoires perpendiculaires peu révélatrices du problème des trajectoires périodiques, notamment dans les triangles. Tandis que la méthode de Fagnano permet de trouver des trajectoires périodiques pour tous les triangles aigus. Il serait intéressant de montrer qu'il est impossible de couvrir un continuum de solutions par les trajectoires perpendiculaires.
Il semble que la propriété d'invariance de la transformation dans l'espace des phases, c'est à dire la propriété qu'à un point de l'espace des phases à revenir à lui-meme au bout d'un certain nombre d'itérations par la transformation (donc invariance par la transformation) soit plus subtile que cela. Cette propriété ne pourrait pas se résoudre à la simple utilisation d'invariance de la réflexion sur le bord. Pour qu'il y ait invariance d'une trajectoire dans le polygone, il semble nécessaire de jouer en même temps sur les deux paramètres de l'espace des phases (bord, direction) et pas seulement le premier ou le deuxième séparément.

4 Trajectoires non-périodiques dans un polygone rationnel

Dans cette partie, nous étudions la quantité et le comportement de trajectoires non-périodiques en utilisant le cadre de la dynamique continue.

Voici un comportement possible pour une trajectoire non-périodique:

Définition 4.1. *Une trajectoire est dense si elle traverse tout disque ouvert du polygone.*

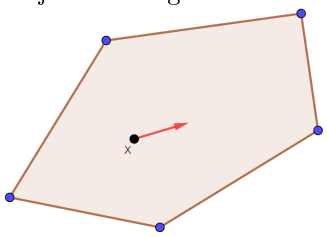
Nous prouverons ce théorème :

Théorème 4.2 (Le théorème de densité, Katok et Zemljakov (1975))**.** *Pour tout polygone rationnel et pour toute direction θ sauf un nombre dénombrable de directions, toutes les trajectoires de direction θ sont denses dans la surface de translation.*

Le théorème de densité dit que pour une position et une direction de mise en mouvement quelconques, la boule de billard traversera n'importe quelle zone du polygone avec probabilité 1.

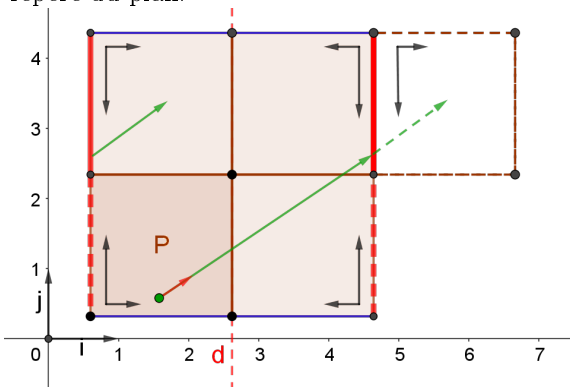
4.1 La dynamique continue

Soit P un polygone rationnel et ∂P son bord. On place le polygone dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, orienté dans le sens trigonométrique. On introduit une nouvelle dynamique pour le billard sur P en définissant un nouvel espace des phases $\mathcal{X}$: l'ensemble $(\mathring{P} \times \mathbb{S}^1) \cup (\partial P \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$. C'est une dynamique continue car on note désormais la position de la boule à chaque instant, repérée par sa position $x \in P$ et sa direction $\theta \in [0, 2\pi[\cong \mathbb{S}^1$.
La transformation de la dynamique continue sur le polygone est alors l'application $T : \mathcal{X} \times [0; +\infty[\longrightarrow \mathcal{X}$ qui associe aux coordonnées $((x, \theta), t_0) \in \mathcal{X} \times [0; +\infty[$ d'une boule à l'instant t_0 l'unique point $(y, \beta) \in \mathcal{X}$ décrivant le mouvement de la boule à l'instant $t_0 + t$. T est discontinue sur le bord de P. Aux sommets, on pourra considérer que la trajectoire stagne.



Comme on l'a déjà un peu vu dans la section 3.2, pour étudier la trajectoire, on peut aussi bien déplier le polygone par réflexion. Le principe est le suivant: Étant donnée une trajectoire dans le polygone déterminée par un vecteur, au lieu de faire réfléchir la trajectoire sur le prochain côté d'incidence, on la prolonge dans le plan euclidien et on déplie le polygone P par une réflexion d'axe

dirigée par ce côté.
Par réflexion du polygone, on permet à la trajectoire de conserver sa direction par rapport au repère du plan.



4.2 La surface de translation

Dans cette partie, nous allons définir une surface sur laquelle une trajectoire quelconque possède cette propriété d'invariance pour la direction.

On considère toujours P dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, orienté dans le sens trigonométrique. On défini d'abord le revêtement universel. On construit les suites $(U_n, n \in \mathbb{N})$ et $(B_n, n \in \mathbb{N})$ par la récurrence:
$U_0 = P_0 = P$. On note $B_0 = \{[A_1, B_1], ..., [A_{k(0)}, B_{k(0)}]\}$ les côtés de $U_0 = P$ qu'on appelle ici le bord de U_0. Plus généralement ∂P les côtés d'un polygone P. Soient $B_n = \{[A_1, B_1], ..., [A_{k(n)}, B_{k(n)}]\}$ le bord de U_n. On pose $N(0) = 1$ et $N(n)$ le nombre de polygones contenus dans U_n.
Dans l'étape n, pour chaque $j \in \{1, \ldots, k(n)\}, [A_j, B_j]$ appartient à un polygone P_i de U_n, soit P' l'image de P par la réflexion de direction $B_j - A_j$. On note $P_{N(n)+j} = P'$ et $U' = U_n$. On colle $P_{N(n)+j}$ à U' en considérant l'union disjointe de U' et P' et en identifiant chaque point de $[A_j, B_j]$ à son image par la réflexion. On pose de plus $B_{(n+1,j)} = B_{n+1} \cup (\partial P' \backslash [A_j, B_j])$.
Enfin lorsque $j = k(n)$, on pose $N(n+1) = N(n) + k(n)$, $B_{n+1} = B_{(n+1,k(n))}$ et $U_{n+1} = U'$.

Définition 4.3. *Le revêtement universel $\mathcal{U}$ de P est l'union croissante homéomorphe au plan $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$.*

On considère les polygones P_i du revêtement universel. Le repère privilégié du plan introduit pour P est aussi valable pour les images P_i issues du dépliage.

Définition 4.4. *Sur une relation entre certains polygones de $\mathcal{U}$:*

- *Lors de la construction du revêtement universel, si on marque le polygone de départ par deux flèches perpendiculaire, de longueurs différentes*

et qu'on applique leur réflexions par rapport différents côtés, ***l'angle relatif*** *d'un polygone P_i par rapport à celui de départ $P = P_0$ est alors l'angle de rotation pour passer des deux premières flèches aux deux flèches réfléchies du polygone déplié en question, à translation près.*
Par exemple, si P_i est un carré obtenu par rotation de $\frac{\pi}{2}$ à partir de P_0, l'angle relatif vaut $\frac{\pi}{2}$ et non 0.Par exemple, les angles relatifs des carrés sur la figure 4.1 sont déterminés par l'orientation des flèches noires.

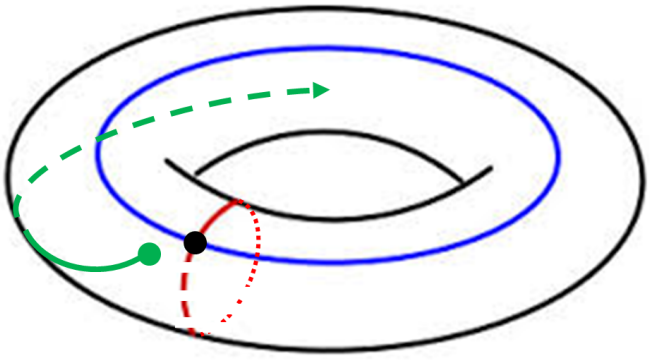
- *On définit la relation $\sim_P$ pour $P_i \sim_P P_j$ si les deux polygones images ont le même angle relatif. On peut vérifier que c'est une relation d'équivalence.*
- *On appellera polygone représentant un polygone représentant une classe d'équivalence pour $\sim_P$.*

On sait par le théorème 3.8. que pour un polygone rationnel P, son orbite par l'action de $O(P) \cong D_N$ est finie. Ainsi, les angles relatifs possibles pour le polygone sont en nombre fini et il y a un nombre fini de classes d'équivalence pour $\sim_P$.

Définition 4.5. *On appelle surface de translation $\mathcal{S}$ d'un polygone P la surface obtenue par identification des polygones de même angle relatif $\mathcal{S} = \mathcal{U}/_{\sim_P}$. L'aire de $\mathcal{S}$ est finie en tant que somme d'aire des polygones représentants d'une classe d'équivalence.*

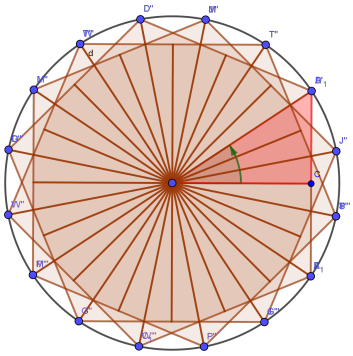
Prouvons que $\mathcal{S}$ est effectivement une surface

Dans la pratique, on construit et visualise $\mathcal{S}$ en formant d'abord un patron Q, une surface avec un bord, sur laquelle on voit apparaître chaque face de la surface de translation et où les côtés du bord sont identifiés deux à deux. Sur l'exemple du carré, ce sont les 4 carrés en trait plein. Un patron n'est généralement pas unique pour un même polygone. En identifiant les bords des quatre carrés, on obtient une surface sans bord qui peut se voir comme un tore.



Le patron Q n'est pas toujours contenu dans le plan. Par exemple, le triangle rectangle $\mathcal{T}(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{16})$ se déplie en faisant deux tours autour du coin de plus

petit angle.



Définition 4.6. *Sur certains points particuliers de $\mathcal{S}$:*

- *Un point marqué est un sommet d'un polygone représentant, vu dans $\mathcal{S}$.*
- *Soit un point marqué p issu d'un sommet d'un polygone représentant. On note $\theta = \frac{m}{n}\pi, (m,n) = 1$ l'angle ayant pour base ce sommet. On appelle degré d'un point marqué le plus petit entier naturel de la forme $d(p) = \frac{2km}{n}, k \in \mathbb{N}^*$. Il correspond au nombre de tours nécessaires par dépliage du polygone représentant autour du sommet pour parvenir à un polygone de même angle relatif.*
- *Une singularité est un point marqué de degré supérieur ou égal à 2.*

La subtilité est que, par superposition de polygones représentants autour d'une singularité s dans le plan, il existe $d(s)$ segments ouverts de même pente partant de la singularité, mais deux à deux disjoints dans $\mathcal{S}$ car appartenant aux $d(s)$ polygones autour de s. On peut donc aller vers la singularité selon une même direction puisque c'est le plan qui détermine la direction, mais en étant dans deux représentants différents. Afin de représenter un voisinage d'une singularité s du patron Q dans le plan, on échelonne l'angle du sommet associé à s par un facteur $\frac{1}{d(s)}$. Un tour dans la construction d'avant correspond maintenant à $\frac{1}{d(s)}$ tours. Comme les angles sont rationnels, on fait un nombre fini de tours donc le degré est fini. Un exemple ici avec $s = 3$ où l'on voit alors que les lignes droites se courbent:

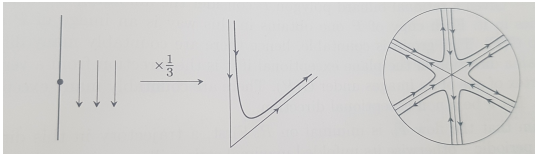


image tirée de [6], section "Billiards in polygons", page 66

Pour l'exemple du carré, il n'y a pas besoin d'une contraction. Pour une ligne touchant le point marqué dans le tore, on peut simplement la faire continuer tout droit. Le sommet du carré n'est pas une singularité mais c'est tout de

même un point marqué.

Nous montrons que les **droites** et les **directions** sont bien définies sur $\mathcal{S}$ sauf aux singularités. C'est en ce sens que nous disons que $\mathcal{S}$ est une surface.
Deux cas sont à distinguer:

Considérons un point de l'intérieur d'un polygone représentant d'une classe d'équivalence. V un de ses voisinages contenu dans le polygone. Pour chaque angle θ, notons $E(\theta, P')$ l'ensemble des intersections $D \cap V'$ où D est une droite de pente θ et V' est la préimage de V dans le représentant P' de la classe d'équivalence en question. Alors, le recollement effectué pour passer de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{S}$ induit une bijection entre chaque $E(\theta, P')$ et $E(\theta, P'')$ où P' et P'' sont deux représentants quelconques de la classe d'équivalence. Ainsi, l'ensemble des projections sur $\mathcal{S}$ des droites de $E(\theta, P')$ ne dépend pas du représentant P'.
Une droite de pente θ au sein d'une classe d'équivalence dans $\mathcal{S}$ est alors définie comme une telle projection.
Considérons un point du bord de deux polygones représentants adjacents. V un de ses voisinages contenu dans l'union des deux polygones. Pour chaque angle θ, notons $E(\theta, P', Q')$ l'ensemble des intersections $D \cap V'$ où D est une droite de pente θ et V' est la préimage de V dans les représentants P' et Q' de deux classes d'équivalence qui sont adjacents dans $\mathcal{U}$. Alors, le recollement effectué pour passer de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{S}$ induit une bijection entre chaque $E(\theta, P', Q')$ et $E(\theta, P'', Q'')$ où (P', Q') et (P'', Q'') sont deux couples de représentants adjacents quelconques des deux classes d'équivalence. Ainsi, l'ensemble des projections sur $\mathcal{S}$ des droites de $E(\theta, P', Q')$ ne dépend pas des représentants adjacents P' et Q'.
Une droite de pente θ traversant deux classes d'équivalence est alors définie comme une telle projection. En conséquence, on a défini ce qu'est une droite avec une direction $\theta \in [0, 2\pi]$ au sein d'une classe d'équivalence et à travers deux classes d'équivalence adjacentes dans $\mathcal{S}$.

On peut alors parler de ligne ou géodésique dans la direction θ au sein de $\mathcal{S}$ sauf pour les singularités. Par abus de langage, on dira que c'est une surface sur l'ensemble de l'espace topologique quotient $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ est homéomorphe au plan, les directions varient dans S^1.

Remarque: les patrons dans le sens courant ne forment pas toujours une surface de translation: les patrons du cube, par exemple, consistent en 6 carrés donc plusieurs carrés de même direction (il y a 4 directions). Donc certains ne seront pas recollés correctement pour permettre la notion de direction.
Remarque: le patron du triangle $\mathcal{T}(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ autour du plus petit angle est un octogone. Après le recollement des bords, on obtient donc le double-tore $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$.
Remarque: pour l'exemple de l'angle $\frac{3\pi}{8}$, on peut voir localement le sommet comme le sommet d'un cone de hauteur $\sqrt{(3)}$. On parle pour cela de singularité conique.

4.3 Dynamique sur la surface de translation

On introduit une dynamique continue sur $\mathcal{S}$ similairement à celle sur P.

Définition 4.7 (Transformation de la surface de translation)**.** *l'espace des phases correspondant devient:* $\mathcal{X} = \mathcal{S} \times \mathbb{S}^1$. *On définit une transformation* T *de la surface de translation :* $\mathcal{X} \times [0; +\infty[\longrightarrow \mathcal{X}$. *D'abord pour des temps petits, une trajectoire de direction* θ *va traverser un petit nombre de faces et on peut donc la dessiner sur un patron. Pour un petit temps* t*, la transformation envoie le point* x *de la surface de translation qu'on identifie au patron sur le point* y *du patron correspondant au point de la trajectoire depuis* x *en ligne droite dans la direction* θ *au bout de* t *unité de temps. Ensuite on prolonge aux temps quelconques en composant plusieurs fois la dynamique en petit temps:* $T(T((x,\theta),t),\theta),s) = T((x,\theta),t+s)$. *Jusqu'au temps* t*, on dessine sur un patron, puis du temps* t *au temps* $t+s$ *on dessine peut être sur un autre patron. Mais par les propriétés de la surface de translation, les patrons se superposent convenablement lorsque l'on considère la surface de translation, donc cette composition est possible.*
On impose par définition que la trajectoire stagne aux points marqués: si s *est un point marqué,* $T(s,\theta,t) = (s,0)$, $\forall t, \theta$.

Cette définition est valide. Comme on l'a vu, que l'on soit à l'intérieur d'un polygone représentant ou sur un bord, la notion de ligne droite est définie donc on peut aller dans la direction θ. La transformation a été définie pour justifier le fait que l'on parle d'une dynamique. Néanmoins on considèrera par la suite la notion de flot:

Définition 4.8 (Flot $\mathcal{F}_\theta$)**.** *La transformation* T*, restreinte aux points qui ne touchent jamais les singularités, préserve l'angle theta :* $T((x,\theta),t) = (y,\theta)$. *Donc,* y *est de la forme* $F_\theta(x,t)$. *On obtient la transformation ou flot* $\mathcal{F}_\theta$ *:* $\mathcal{S} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{S}$. *Le flot* $\mathcal{F}_\theta$ *est la transformation l'ensemble des trajectoires de même direction* θ *vues dans la surface de translation.*

Si l'on considère une direction $\theta = \theta_0$ dans le polygone de départ $P = P_0$, le flot $\mathcal{F}_\theta$ correspond par construction aux trajectoires de direction θ_i dans le polygone P_i, où θ_i et P_i sont respectivement la i-ième image de θ_0 et P_0 par l'action de $O(P) \cong D_N$.
Remarque: on désigne $T((x,\theta),t)$ par $\mathcal{F}_\theta^t(x)$.
Remarque: par construction, une trajectoire vue dans $\mathcal{S}$ a toujours la même direction. C'est ce qui fait l'utilité de ces surfaces pour l'étude des trajectoires. Une trajectoire de même direction peut sous certaines conditions être translatée continument sans que cela n'affecte trop les propriétés de la trajectoire de départ. On verra notamment comment cela simplifie l'étude globale des trajectoires possibles dans le billard.

4.4 Démonstration du théorème

Nous allons maintenant démontrer le théorème 4.2. Celui-ci dit que pour tout polygone rationnel et pour toute direction θ sauf un nombre dénombrable de directions, toutes les trajectoires de direction θ sont denses dans la surface de translation.
On se donne donc un polygone $\mathcal{P}$. On raisonne désormais selon les 3 niveaux issus de $\mathcal{P}$: un des patrons Q représenté en jaune dans la figure ci-dessous, la surface de translation $\mathcal{S}$ et le revêtement universel $\mathcal{U}$ correspondant. On donne d'abord quelques définitions propres à la démonstration.

Définition 4.9 (Les types de trajectoires)**.** *Une trajectoire est:*

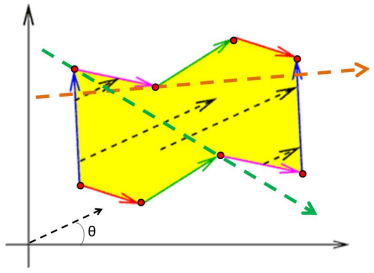
- *Régulière si elle ne touche aucun point marqué dans $\mathcal{U}$*
- *Séparatrice si elle touche un et un seul point marqué dans $\mathcal{U}$*
- *Exceptionnelle si elle connecte deux points marqués dans $\mathcal{U}$*

Définition 4.10 (Direction exceptionnelle)**.** *Une direction dans $\mathcal{S}$ est exceptionnelle si il existe une trajectoire exeptionnelle dans cette.*

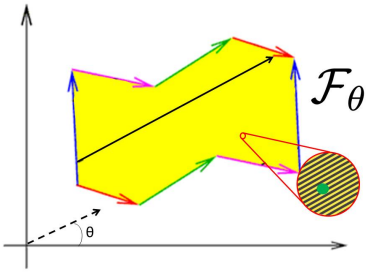
Remarque: lorsque l'on traverse un point marqué, ces trajectoires dans $\mathcal{S}$ ne correspondent pas à des trajectoires dans le polygone. En effet, dans $\mathcal{P}$ la trajectoire s'arrêterait. Si on les prolonge par des lignes de même direction dans $\mathcal{S}$, elles ne correspondent plus à des trajectoires d'une boule dans $\mathcal{P}$. On parle de feuilletage.

Définition 4.11. *Une trajectoire est **dense dans** $\mathcal{S}$ si tout disque ouvert de $\mathcal{S}$ de rayon $\epsilon > 0$ contenu dans la surface de translation est traversée par la trajectoire, pour tout $\epsilon > 0$.*

Définition 4.12. *On appelle flot minimal un flot dont toutes les trajectoires sont denses.*



Des feuilles régulières (en noir), une feuille séparatrice et une feuille exceptionnelle (en orange et vert.)



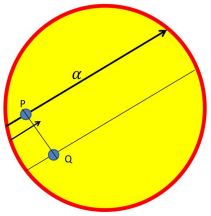
Trajectoire de direction θ dense dans Q. la trajectoire, représentée en noire, intersecte le petit disque que l'on a agrandi.

Démonstration du théorème étape par étape:

Étape 1 : toute trajectoire de direction non-exceptionnelle est non-périodique.
On prouve la contraposée. Soit t une trajectoire périodique sur $\mathcal{S}$. Si elle est de direction exceptionnelle, la contraposée est juste. Elle ne peut pas être séparatrice car en touchant un point marqué dans $\mathcal{S}$, elle toucherait au moins le même point marqué dans $\mathcal{U}$ en y revenant par périodicité, mais alors la trajectoire serait exceptionnelle, donc la direction serait exceptionnelle.
Alors elle est régulière. Comme il y a un nombre fini de points marqués dans $\mathcal{S}$ et que t possède un nombre fini de segments vu dans le patron Q, par périodicité, il est possible de translater légèrement t en t' d'une distance $r > 0$ de sorte que t' aussi ne traverse pas de point marqué et soit donc toujours périodique par conservation de la direction et de la suite de côtés que touchent les trajectoires de t à t'. Si la trajectoire n'était pas périodique, il y aurait un nombre infini de segments et l'on ne pourrait pas garantir qu'en translatant t, on ne traverse pas de point marqué.

Étape 2: lemme

Lemme 4.13. *Soit une trajectoire non-périodique α issue d'un point P qui n'atteint pas de point marqué. Pour tout segment $I =]P, Q[$ dans $\mathcal{S}$ perpendiculaire à la direction de la trajectoire, la trajectoire traversera le segment pour un temps suffisamment long.*



Prouvons ce lemme. Sans perte de généralité on peut dire que la direction de α est verticale. Il suffit de faire pivoter la figure où le repère privilégié de $\pi/2 - \theta$, ce qui ne change pas la propriété de densité. Soit $I =]P, Q[$ un segment ouvert

horizontal.
On duplique I en un segment J qui lui coïncide initialement puis on translate J vers le haut d'une distance h dans la surface de translation $\mathcal{S}$, tant que J n'intersecte pas le segment I. Soit $R_h = \{\mathcal{F}_\theta(x,t) : x \in J, t \in [0,h]\}$ la marque de cette translation. C'est un rectangle qu'on appelle la bande.
Si l'on ne rencontre jamais de point marqué, comme l'aire de $\mathcal{S}$ est finie, J devra intersecter I.

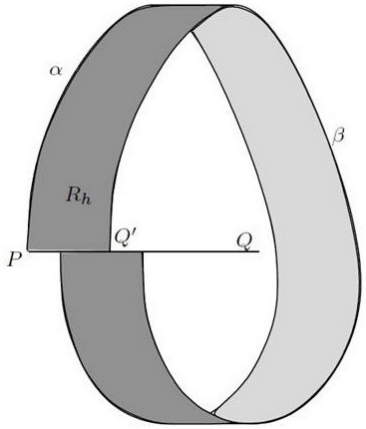
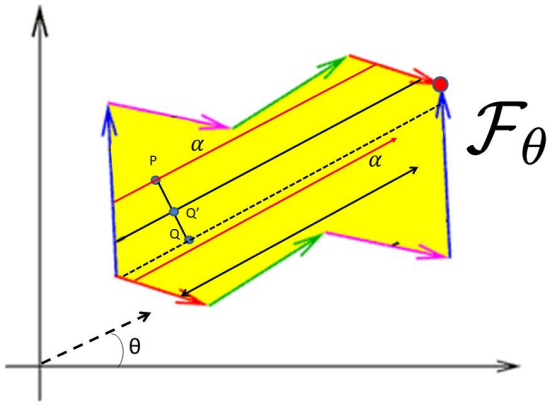


image tirée de [2]

Si à un moment, pour un certain $h_0 > 0$, J rencontre un point marqué S_0. Alors par réversibilité il existe un chemin de S_0 à un point $Q_0 \in I$ dans le rectangle R_{h_0}. Ce chemin fait partie d'une séparatrice verticale ou d'une trajectoire exceptionnelle. On définit alors $I_1 =]P, Q_0[$ et $J_1 =]B_0, S_0[$ où B_0 est l'extrémité gauche de J à la hauteur h_0. Ensuite on poursuit la translation avec ce nouveau segment J_1.



A chaque rencontre d'un point marqué, le rectangle contient une nouvelle séparatrice verticale définie en partant depuis ce point marqué et en allant vers le bas. A partir d'un point marqué, on peut aller vers le bas de différentes

manières, contrairement aux autres points réguliers. Ou pareillement, on peut aller vers un point marqué suivant plusieurs chemins de même direction. Mais comme le degré du point marqué est fini, ce nombre de chemins est fini (section 4.6).
De plus, on se rappelle que dans $\mathcal{S}$, il y a un nombre fini de points marqués. Donc au total, le nombre de manières de rejoindre un point marqué en allant vers le haut est fini. Autrement dit, il y a un nombre fini de séparatrices verticales.
Ainsi, on peut dans le pire des cas rencontrer tous les points marqués et chacun par tous les chemins possibles mais ce sera un nombre fini de fois et le processus de réduction de l'épaisseur du rectangle s'arrêtera. On note $I' =]P, Q'[$ le segment issu de cette réduction, où Q' est le dernier point de I lors de la réduction qui menait à un point marqué avant que la bande ne se réintersecte. Alors on translate le segment I', la hauteur h de la bande augmente et donc la surface de la bande d'épaisseur strictement positive augmente jusqu'à dépasser l'aire de $\mathcal{S}$. Or, la bande est toujours contenue dans $\mathcal{S}$. On conclut alors que le segment I' devrait ré-intersecter le segment initial I avant de retoucher éventuellement un point marqué déjà rencontré.

Ensuite, on a deux possibilités:
Si l'intersection se fait de telle sorte que la feuille α intersecte I', alors elle intersecte I et le lemme est démontré.
Si l'intersection se fait sans que α n'intersecte I', c'est à dire par la gauche sur la figure, alors on poursuit l'allongement avec la bande qui dépasse à gauche. Suivant le même raisonnement que précédemment, cette bande intersectera I' mais cette fois-ci, ce ne peut être que par l'autre côté. En effet, notons Q'' le point appartenant à I' qui est envoyé sur P par la transformation. Ce point arrive en P pour la première fois en un temps t_0. Considérons la bande dépassante qui intersecte par la gauche le segment I'. Il existe donc un point $X \in \mathcal{F}_{\pi/2}(I', t_0)$, c'est à dire sur la bande dépassante à la même ordonnée que P, qui est envoyé sur P pour la première fois en un temps t_1.

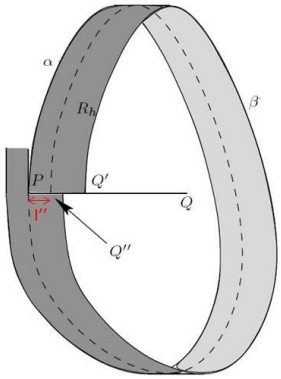
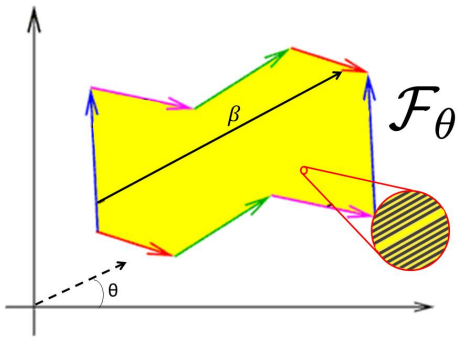


image tirée de [2]

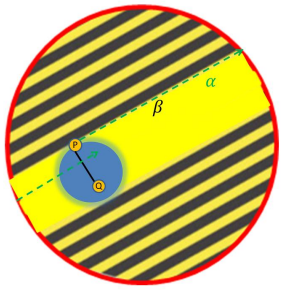
Considérons alors le point $Y = \mathcal{F}_{\pi/2}(X, t_1 - t_0)$. Alors Y est envoyé sur P en un

temps t_0 par T. Or la transformation est injective du moment qu'elle ne touche pas de point marqué. Donc $Y = Q''$ dans $\mathcal{S}$.
Si $t_1 - t_0 < 0$ alors la bande de départ issue de I' s'intersecte au bout d'un temps $t_0 - (t_0 - t_1) = t_1 < t_0$ ce qui est contradictoire car t_0 est par hypothèse le premier instant où la bande issue de I' s'intersecte.
Si $t_1 - t_0 > 0$ alors on effectue le même raisonnement avec la bande dépassante qui arrive en $Y = Q''$ en un temps $t_1 - (t_1 - t_0) = t_0 < t_1$ donc intersecte I' en ce même temps, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse sur t_1.
Finalement le lemme est démontré.

Étape 3: une trajectoire de direction non-exceptionnelle est dense
Soit β une trajectoire de direction non-exceptionnelle, elle est non-périodique (étape 1). On note $A = \overline{\beta}$ dans $\mathcal{S}$. Alors β dense $\Leftrightarrow$ A=S.
Par l'absurde, si β n'est pas dense alors il existe une bande vide d'épaisseur non-nulle.



Soit un disque ouvert $D \subset \mathcal{S}\backslash A$ de rayon maximal. Alors il existe $P \in \partial D$ tel que $P \in \overline{\beta}$.
On considère un point $Q \in D$ de tel sorte que $]P, Q[\subseteq \mathcal{S}\backslash A$ soit transverse à β.
Du point P on initie une trajectoire α de même direction que β. $\alpha \in \overline{\beta} = A$.
On peut initier la trajectoire du point P selon la direction de β vers le haut ou vers le bas. Si dans les deux sens on rencontre un point marqué, alors la trajectoire passant par P en partant d'un point marqué et atteignant l'autre P est exceptionnelle, donc la direction de β est exceptionnelle, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse sur β.
Or, par le lemme (étape 2), $\alpha \in A$ intersecte $I =]P, Q[$: $]P, Q[\nsubseteq \mathcal{S}\backslash A$. Ce qui est contradictoire avec $]P, Q[\subseteq \mathcal{S}\backslash A$.



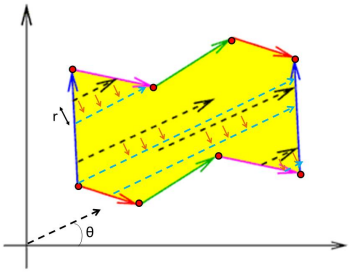
Étape 4: il y a un nombre dénombrable de directions exceptionnelles. Les point marqués sont en nombre dénombrable puisqu'on déplie sur un intervalle de temps discret les polygones lors de la construction de $\mathcal{U}$. Comme les points marqués sont en nombre dénombrable, le nombre de couples de points marqués l'est aussi. Or à deux directions exceptionnelles différentes correspondent (au moins) deux couples de points marqués différents. Ainsi il y a plus de couples de points marqués que de directions exceptionnelles, donc le nombre de directions exceptionnelles est dénombrable.

Conclusion.

- Une trajectoire de direction non-exceptionnelle est dense
- Les directions exceptionnelles sont dénombrables

Seules les trajectoires de directions exceptionnelles peuvent ne pas être denses. Comme ces dernières sont en nombre dénombrable, toutes les trajectoires sont denses sauf pour un nombre dénombrable de directions, ce qui est bien l'énoncé du théorème de densité.

Sur l'exemple ci-dessous où est représenté en jaune un patron de la surface de translation, on illustre l'étape 1 où l'on translate une trajectoire t. Disons que l'on commence une trajectoire t au niveau de la flèche de gauche bleue. Quand elle touche la flèche rose, elle réapparait alors à un autre endroit dans le patron, par identification de bord, mais toujours selon la même direction. Comme t est périodique, elle finira par revenir en haut. les trajectoires translatées de t à t' suivent la même configuration donc finalement on peut voir l'ensemble des bandes comme formant un cylindre dans $\mathcal{S}$ d'épaisseur r dont les cercles aux bords sont t et t'.
Ce cylindre ne peut pas être épaissi à l'infini car il existe des points marqués. En translatant t en t' dans la surface, on atteindra forcément un point marqué. Mais par conservation de la périodicité tout au long de la translation, la trajectoire ultime t' qui touche ce point marqué est périodique. Pour les raisons que nous avons évoquées au premier paragraphe de cette étape, la trajectoire est alors de direction exceptionnelle.



Remarque: concernant l'interprétation du début, il est facile de faire le lien entre la densité sur la surface de translation et la densité sur le billard. Chaque ouvert de $\mathcal{P}$ reste un ouvert de $\mathcal{S}$ suite au dépliage puisque $\mathcal{P}$ est alors plongé dans $\mathcal{S}$. Étant traversé dans $\mathcal{S}$, il le sera dans $\mathcal{P}$. On pourrait aussi étudier la réciproque pour aller plus loin.
Remarque: nous avions vu que dans un polygone rationnel et pour une trajectoire donnée, la trajectoire adopte un nombre fini de directions possibles. On peut alors se demander si chaque ouvert du polygone rationnel sera traversé par la trajectoire selon toutes les directions possibles. C'est le cas. Il suffit de considérer l'ouvert dans la surface de translation, provenant de l'ouvert original et contenu dans le polygone déplié, associé à la direction possible choisie. Par le théorème 4.2, la trajectoire traverse l'ouvert dans la surface de translation et en revenant au polygone de départ, la trajectoire traverse donc l'ouvert original dans la direction possible choisie.

4.5 Vers le théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie, 1986

Le théorème de densité affirme alors que pour un ouvert quelconque dans un polygone rationnel muni d'un repère orienté et pour presque toute direction θ, toutes les trajectoires initiées selon la direction θ traversent une infinité dénombrable de fois l'ouvert. On peut en effet décomposer l'ouvert en une infinité dénombrable de sous-ouverts et la trajectoire les traversera tous par densité dans $\mathcal{S}$. On peut se demander si, au bout d'un temps très grand, le temps passé par la boule à l'intérieur est le même d'un ouvert à l'autre, proportionnellement à la taille de l'ouvert. Autrement dit, les trajectoires sont-elles équidistribuées dans $\mathcal{S}$? Le théorème de Kerckhoff, Masur, Smillie (ou KMS) démontre que c'est le cas. C'est un résultat important en système dynamique. Le théorème de densité est souvent appelé théorème de KMS faible pour souligner qu'il est le fruit de cette propriété bien plus forte.

En termes mathématiques, le théorème de KMS revient à montrer qu'il y a unique ergodicité au sein de la surface de translation pour Lebesgue presque toute direction θ. Voici un aperçu du vocabulaire qui rentre en jeu:

Définition 4.14 (Mesure ergodique par rapport à une transformation)**.** *Une mesure invariante μ est ergodique par rapport à une transformation T si tout sous-ensemble mesurable pour est de mesure pleine ou nulle pour μ: $\forall A$ mesurable pour μ, $T^{-1}(A) = A \Rightarrow \mu(A) = 0$. On dit que la transformation est ergodique pour la mesure μ.*

Remarque: l'ensemble $\mathcal{M}_T(\mathcal{S})$ des mesures invariantes par T sur $\mathcal{S}$ n'est pas vide et il est convexe.
Remarque: un théorème moins trivial est que les points extrémaux de l'ensemble des mesures de probabilité invariantes sont les mesures ergodiques.

Définition 4.15 (Unique ergodicité pour un flot $\mathcal{F}_\theta$)**.** *Un flot $\mathcal{F}_\theta$ sur une surface de translation $\mathcal{S}$ est uniquement ergodique s'il existe une seule mesure ergodique de probabilité invariante par rapport au flot.*

Pour une démonstration du théorème de KMS, on pourra s'orienter vers [2] et [5]. Cette démonstration se fait en deux étapes. La première étant le critère de Masur, qui pour une direction θ fixée, donne une condition suffisante sur $\mathcal{S}$ pour que $\mathcal{F}_\theta$ soit uniquement ergodique. La deuxième étape consiste alors à montrer que le critère de Masur est satisfait sauf pour un nombre dénombrable de directions.

Références

[1] Paul Bagourd. "Triangles périodiques". In: *MATh.en.JEANS* (2016), pp. 6–8.

[2] Sébastien Gouëzel and Erwan Lanneau. "Un théoreme de Kerckhoff, Masur et Smillie: Unique ergodicité sur les surfaces plates". In: *arXiv preprint math/0611827* (2006).

[3] Lorenz Halbeisen and Norbert Hungerbühler. "On periodic billiard trajectories in obtuse triangles". In: *Siam Review* 42.4 (2000), pp. 657–670.

[4] Howard Masur et al. "Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards". In: *Duke mathematical journal* 53.2 (1986), pp. 307–314.

[5] Thierry Monteil. "Introduction to the theorem of Kerkhoff, Masur and Smillie". In: 2010.

[6] S Tabachnikov and SMF Billiards. *Panoramas et Synthèses*. 1995.

[7] Ya B Vorobets, Gregorii Aleksandrovich Gal'perin, and Anatolii M Stepin. "Periodic billiard trajectories in polygons: generating mechanisms". In: *Russian Mathematical Surveys* 47.3 (1992), p. 5.